

Marek Rotkegel\*

## SIŁY WEWNĘTRZNE I REAKCJE PODPOROWE W ELEMENTACH OBUDOWY PROSTOKĄTNEJ

### Streszczenie

W artykule przedstawiono metody obliczania podziałki obudowy prostokątnej. Uwzględniono obudowę prostokątną dwu-, trój- i czterostojakową. Wszystkie ostateczne wzory zostały sprowadzone do najprostszej postaci, co wpływa na skrócenie czasu obliczeń. Przy znanej wartości ciśnienia górotworu, dobór odpowiedniego rozstawu odrzwi zajmuje zaledwie kilka minut.

### Internal forces and bearing reactions in units of rectangular support

### Abstract

In the paper, method of calculation of rectangular support pitch was presented. Two, triple and four props rectangular support was considered. All final formulas were reduced to the simplest form, what impacts into the shortening of calculations time. At the known value of rockmass pressure, selection of suitable spacing of frames takes only a few minutes.

### WPROWADZENIE

Prostokątna podporowa obudowa wyrobisk korytarzowych jest bardzo rzadko stosowana w polskim górnictwie węgla kamiennego. Wynika to między innymi z niezbyt dużej nośności prostych elementów stropnicowych oraz kształtu przekroju poprzecznego różniącego się od naturalnego sklepienia, z czym wiąże się zwiększone obciążenie tej obudowy. Wady te powodują, że wyrobiska o prostokątnym kształcie przekroju poprzecznego, korzystne ze względów technologicznych, szczególnie pożądane w rozcinkach ścianowych, nie mogą być stosowane we wszystkich warunkach geologiczno-górnictwowych.

Korzystniej przedstawia się sytuacja w przypadku obudowy kotwiowej i podporowo-kotwiowej, w których dzięki zastosowaniu kotwi, zamiast stojaków pośrednich, jest możliwe, bez zawężenia światła wyrobiska, wprowadzenie dodatkowych podpór (w postaci kotwi) odciążających stropnicę, a przez to zwiększających parametry nośnościowe całej obudowy.

Obudowa prostokątna podporowa, kotwiowa lub podporowo-kotwiowa jest obudową, którą można dobrać w miarę szybko, bez konieczności stosowania specjalistycznych narzędzi w postaci drogich, często skomplikowanych obliczeniowych programów komputerowych, działających z wykorzystaniem metody elementów skończonych (MES). Wynika to z przyjmowanych do obliczeń schematów obudowy, która jest traktowana jako belka prosta na kilku podporach obciążona w sposób rów-

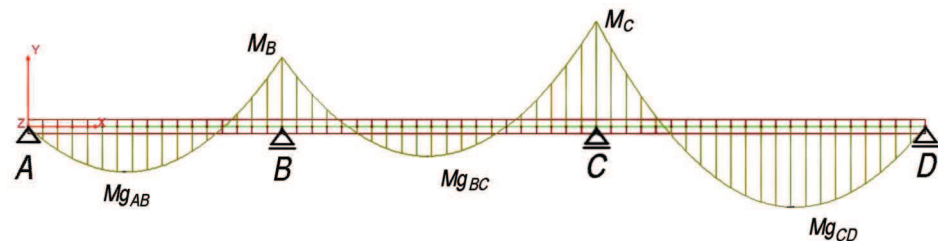
---

\* Główny Instytut Górnictwa

nomierny na całej długości. Oczywiście nawet w przypadku tej obudowy jest możliwe zastosowanie komputerowych technik obliczeniowych, zwiększających liczbę wariantów obudowy, sposoby jej podparcia i obciążenia. Ponadto, pozwala to na wyeliminowanie pewnych uproszczeń w metodach analitycznych, polegających głównie na przyjęciu sposobu obciążenia. Pomimo to, w celu sprawnego projektowania obudowy prostokątnej czy też szybkiego zweryfikowania wyników obliczeń numerycznych, wyprowadzono wzory pozwalające na obliczenie sił i momentów występujących w poszczególnych jej elementach. Ich znajomość i porównanie z wartościami dopuszczalnymi może być podstawą do zaprojektowania obudowy prostokątnej, przenoszącej obciążenia działające ze strony górotworu. Należy pamiętać, że przyjęty w analizach schemat obciążenia stropnicy, polegający na równomiernym jej obciążeniu, jest wyidealizowany, a w rzeczywistości należy spodziewać się obciążeń w mniejszym stopniu regularnych. Ponadto, należy mieć na uwadze, że elementy obudowy pracują także w zakresie odkształceń plastycznych, co nie znajduje odzwierciedlenia w algorytmach obliczeniowych przydatnych w praktyce inżynierskiej. Fakt ten został uwzględniony w sposób pośredni przez przyjęcie maksymalnych obciążeń przenoszonych przez elementy, wyznaczonych w badaniach stanowiskowych.

## 1. ZAŁOŻENIA I WYPROWADZENIA WZORÓW

Przedmiotem analiz były sposoby wyznaczania sił wewnętrznych oraz reakcji podporowych występujących w elementach stalowej obudowy prostokątnej podporowej i kotwiowej, spowodowanych obciążeniem przez górotwór. Określenie tych sił sprowadza się do obliczenia wartości momentów zginających przęsłowych, podporowych oraz reakcji podporowych poszczególnych podpór – kotwi lub stojaków. Przykład przebiegu momentów zginających przedstawiono na rysunku 1, natomiast siły poprzeczne, z uwagi na ich znacznie mniejszy wpływ na stan wyężenia stropnicy, w praktyce inżynierskiej mogą zostać pominięte.



Rys. 1. Przykładowy przebieg momentów zginających w stropnicy na czterech podporach:  $M_B$ ,  $M_C$  – momenty podporowe,  $M_{gAB}$ ,  $M_{gBC}$ ,  $M_{gCD}$  – momenty przęsłowe

Fig. 1. Example pattern of bending moments in a roof bar on four supports:  $M_B$ ,  $M_C$  – moments at the supports,  $M_{gAB}$ ,  $M_{gBC}$ ,  $M_{gCD}$  – moments at the spans

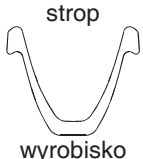

Z przebiegu wykresu momentów zginających wynika, że na długości stropnicy podpartej na trzech i więcej podporach występuje zmiana kierunku zginania. Momenty przęsłowe powodują zginanie w dół, natomiast podporowe w górę. W czasie badań stanowiskowych (Pytlik 1999) prowadzonych zgodnie z normą PN-G-15000-09:1998,

określa się maksymalne wartości momentów zginających przenoszonych przez kształtowniki korytkowe w zależności od kierunku zginania – od ich usytuowania w maszynie wytrzymałościowej – „dnem w dół” lub „dnem w górę”. W celu wykonania analizy przyjęto następujące oznaczenia:

- $Mg_{\downarrow}$  – maksymalny moment zginający przenoszony przez kształtownik wyznaczony w próbie zginania „dnem w dół”,
- $Mg_{\uparrow}$  – maksymalny moment zginający przenoszony przez kształtownik wyznaczony w próbie zginania „dnem w górę”.

Wartości, jakie należy podstawić w dalszych wzorach w miejsce  $Mg_{\max I}$  i  $Mg_{\max II}$  zależą także od usytuowania kształtownika w stropnicy. W przypadku stropnicy zabudowanej dnem w dół  $Mg_{\max I} = Mg_{\downarrow}$ , a  $Mg_{\max II} = Mg_{\uparrow}$ , natomiast, gdy stropnica jest usytuowana dnem w górę  $Mg_{\max I} = Mg_{\uparrow}$ , a  $Mg_{\max II} = Mg_{\downarrow}$ . Zależności te usystematyzowano w tablicy 1.

**Tablica 1.** Maksymalne momenty zginające przenoszone przez kształtownik w zależności od jego usytuowania w stropnicy

Usytuowanie kształtownika w stropnicy	
	
$Mg_{\max I} = Mg_{\downarrow}$	$Mg_{\max I} = Mg_{\uparrow}$
$Mg_{\max II} = Mg_{\uparrow}$	$Mg_{\max II} = Mg_{\downarrow}$

Analizowano trzy typy obudowy prostokątnej:

- obudowę dwupodporową, której konstrukcję stanowi prosta stropnica podparta na końcach na dwóch stojakach lub podwieszona na dwóch kotwiach,
- obudowę trójpodporową, w której prosta stropnica jest podparta na końcach i dodatkowo między skrajnymi podporami,
- obudowę czteropodporową, której stropnica jest podparta w czterech punktach.

W modelach obliczeniowych przyjęto obciążenie ciągłe  $q$  równomiernie rozłożone na całej długości stropnicy. Obciążenie to działa w płaszczyźnie przekroju poprzecznego obudowy prostopadle do stropnicy, a jego wartość wynika z ciśnienia górotworu  $q_0$ , wyznaczonego, na przykład zgodnie z „Uproszczonymi zasadami doboru obudowy” (Rułka i in. 2000). Całkowite obciążenie, działające na stropnicę w modelu obliczeniowym, musi być takie samo co do wartości, jak obciążenie pochodzące od ciśnienia górotworu, zatem

$$\sum F_q = \sum F_{q_0} \quad (1)$$

gdzie:

$F_q$  – siły przyjęte w schemacie obliczeniowym, pochodzące od obciążenia modelowego (ciągłego), MN;

$F_{q_0}$  – siły pochodzące od ciśnienia górotworu, MN.

Uwzględniając szerokość wyrobiska  $S$  (długość stropnicy), a w przypadku sił wywołanych ciśnieniem górotworu, dodatkowo, planowaną podziałkę obudowy  $d$  (rozstaw stropnic), powyższa zależność sprowadza się do równania

$$qS = q_0 Sd \quad (2)$$

gdzie:

$q$  – obciążenie ciągłe działające na stropnicę,  $\text{MN}\cdot\text{m}^{-1}$ ;

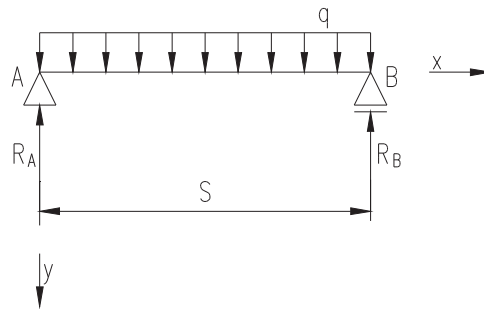
$q_0$  – ciśnienie górotworu, według (Rułka i in. 2000) wartość obliczeniowa obciążenia obudowy, MPa.

Upraszczając powyższe wyrażenia otrzymuje się związek między ciśnieniem górotworu  $q_0$  (działającym na powierzchnię), a obciążeniem ciągłym  $q$  (działającym na długości stropnicy)

$$q = q_0 d \quad (3)$$

### 1.1. Stropnica na dwóch podporach

Obliczenia sił i reakcji podporowych obudowy na dwóch stojakach lub kotwiach nie nastroczą żadnych trudności. Stropnica jest traktowana jako równomiernie obciążona belka podparta na końcach. Schemat obliczeniowy przedstawiono na rysunku 2.



Rys. 2. Schemat obliczeniowy układu

Fig. 2. Computational layout of the system

Reakcje podporowe wynoszą (Jakubowicz, Orłowski 1966; Niezgodziński M.E., Niezgodziński T. 1996):

$$R_A = \frac{qS}{2} \quad (4)$$

$$R_B = \frac{qS}{2} \quad (5)$$

Uzyskane wartości reakcji podporowych muszą być mniejsze niż nośność zastosowanych stojaków lub kotwi. Po zamianie w równaniu (3)  $R_A$  i  $R_B$  na nośność podpór  $A$  i  $B$ , odpowiednio  $P_{\max A}$  i  $P_{\max B}$  oraz przekształcając równania, można otrzymać maksymalne rozstawy stropnic ze względu na nośność zastosowanych stojaków lub kotwi.

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie  $A$

$$d_A = \frac{2P_{\max A}}{q_0 S} \quad (6)$$

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie  $B$

$$d_B = \frac{2P_{\max B}}{q_0 S} \quad (7)$$

Maksymalny moment zginający (prześłowy)  $M_{gAB}$  występuje natomiast w połowie długości belki i wynosi

$$M_{gAB} = \frac{qS^2}{8} \quad (8)$$

Po wstawieniu (3), zamieniając  $M_{gAB}$  na maksymalny moment zginający przenoszony przez kształtownik stropnicy  $M_{g_{\max I}}$  oraz przekształcając równanie, można otrzymać maksymalny rozstaw stropnic ze względu na momentześłowy

$$d_{MAB} = \frac{8M_{g_{\max I}}}{q_0 S^2} \quad (9)$$

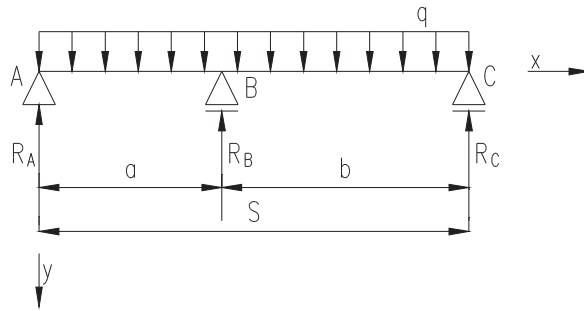
W celu określenia maksymalnego rozstawu stropnic wyznacza się go raz ze względu na nośność stojaków lub kotwi i drugi raz ze względu na maksymalny moment zginający występujący w stropnicy. Jako maksymalny dopuszczalny rozstaw przyjmuje się najmniejszą wartość z obliczonych

$$d \leq \min(d_A, d_B, d_{MAB}) \quad (10)$$

Najczęściej obie podpory (stojaki lub kotwie) charakteryzują się jednakową nośnością. W tych przypadkach obliczenia  $d_A$  i  $d_B$  można ograniczyć do wyznaczenia tylko jednego z nich. W przeciwnym razie wyznacza się rozstaw stropnic ze względu na podporę o mniejszej nośności.

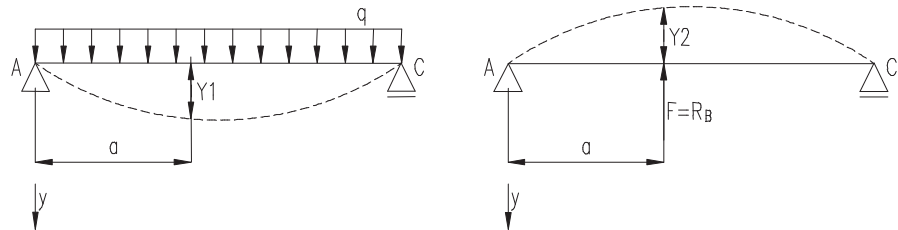
## 1.2. Stropnica na trzech podporach

W obliczeniach obudowę trójstojakową traktuje się jako równomiernie obciążoną belkę podpartą w trzech punktach. Jej schemat przedstawiono na rysunku 3.



**Rys. 3.** Schemat obliczeniowy układu  
**Fig. 3.** Computational layout of the system

Belka taka jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalna. Układ oblicza się metodą superpozycji (Niezgodziński M.E., Niezgodziński T. 1996), a belka jest zastępowana dwiema belkami jednoprzęsłowymi, jak pokazano na rysunku 4.



**Rys. 4.** Idea zamiany układu statycznie niewyznaczalnego na układy statycznie wyznaczalne  
**Fig. 4.** Idea of exchange of statically undetermined system with statically determined systems

Wartości ugięć belek w miejscu podpory B wynoszą:

$$Y_1 = \frac{qS^3 a}{12EI} \left( \frac{1}{2} - \frac{a^2}{S^2} + \frac{a^3}{2S^3} \right) \quad (11)$$

$$Y_2 = -\frac{R_B a^2 b^2}{3EIS} \quad (12)$$

gdzie:

$E$  – moduł Younga, MPa;

$I$  – główny centralny moment bezwładności przekroju,  $m^4$ .

Suma ugięć w miejscu odpowiadającym podporze B musi się zerować

$$Y_1 + Y_2 = 0 \quad (13)$$

Podstawiając do wzoru (13) wyrażenia (11) i (12) oraz wykonując proste przekształcenia, uzyskuje się wartość reakcji  $R_B$  w funkcji rozstawów podpór A, B i C oraz obciążenia ciągłego

$$R_B = \frac{q}{8} \cdot \frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3}{ab} \quad (14)$$

W dalszej kolejności z równania równowagi momentów względem punktu A można wyznaczyć reakcję  $R_C$ :

$$\sum M_A = q \frac{S^2}{2} - R_B a - R_C S = 0 \quad (15)$$

$$R_C = \frac{q}{8} \cdot \frac{-a^2 + ab + 3b^2}{b} \quad (16)$$

a następnie z sumy rzutów sił na oś  $Y$  – reakcję  $R_A$ :

$$\sum F_Y = qS - R_A - R_B - R_C = 0 \quad (17)$$

$$R_A = \frac{q}{8} \cdot \frac{3a^2 + ab - b^2}{a} \quad (18)$$

Po wstawieniu (3), zamieniając  $R_A$ ,  $R_B$  i  $R_C$  na nośność podpór A, B i C, odpowiednio  $P_{\max A}$ ,  $P_{\max B}$  i  $P_{\max C}$  oraz przekształcając równania, otrzymuje się maksymalne rozstawy stropnic ze względu na nośność zastosowanych stojaków lub kotwi.

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie A

$$d_A = \frac{P_{\max A}}{q_0} \cdot \frac{8a}{3a^2 + ab - b^2} \quad (19)$$

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie B

$$d_B = \frac{P_{\max B}}{q_0} \cdot \frac{8ab}{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3} \quad (20)$$

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie C

$$d_C = \frac{P_{\max C}}{q_0} \cdot \frac{8b}{3b^2 + ab - a^2} \quad (21)$$

W przypadku, gdy reakcja skrajnej podpory ( $R_A$  lub  $R_C$ ) osiąga wartość ujemną (brak wstępnego obciążenia stojaka lub kotwi) wartość obliczonego rozstawu stropnic (19) lub (21) także jest mniejsza od zera. Ujemna wartość jest wtedy wskaźnikiem niewłaściwego, nieefektywnego rozmieszczenia podpór i wskazuje na konieczność zmiany ich rozstawów.

Momenty zginające, występujące w stropnicy, mają następujący przebieg w zależności od przęsła:

- w przęsle A-B:  $0 \leq x \leq a$   $Mg = R_A x - q \frac{x^2}{2}$  (22)

- w przęśle B-C:  $a \leq x \leq a+b \quad Mg = R_A x - q \frac{x^2}{2} + R_B (x-a) \quad (23)$

Przyjmując za  $x$  rozstaw podpór A i B ( $x = a$ ) można wyznaczyć wartość momentu zginającego podporowego (w miejscu B)

$$M_B = \frac{q}{8}(-a^2 + ab - b^2) = \frac{q}{8} \frac{-a^3 - b^3}{a+b} \quad (24)$$

Po podstawieniu w równaniu (3) w miejsce  $M_B$  dopuszczalnego momentu zginającego ujemnego  $Mg_{\max II}$  oraz przekształcając równanie, otrzymuje się maksymalny rozstaw stropnic ze względu na moment podporowy

$$d_{MB} = \frac{8Mg_{\max II}}{q_0} \cdot \frac{a+b}{a^3+b^3} = \frac{8Mg_{\max II}}{q_0} \cdot \frac{1}{a^2-ab+b^2} \quad (25)$$

Miejsca występowania momentów przęsłowych natomiast określono przez przyrównanie do zera pochodnych równań momentów zginających w odpowiednich przedziałach. Otrzymano:

- dla przęsła A-B  $x = \frac{3a^2 + ab - b^2}{8a} \quad (26)$

- dla przęsła B-C  $x = \frac{a^2 + 7ab + 5b^2}{8b} \quad (27)$

Podstawiając za  $x$  we wzorze (22) wyrażenie (26), otrzymuje się wartość momentu przęsłowego w przęśle A-B

$$Mg_{AB} = \frac{q}{128} \left( \frac{3a^2 + ab - b^2}{a} \right)^2 \quad (28)$$

Podstawiając natomiast za  $x$  we wzorze (23) wyrażenie (27), otrzymuje się wartość momentu przęsłowego w przęśle B-C

$$Mg_{BC} = \frac{q}{128} \left( \frac{-a^2 + ab + 3b^2}{b} \right)^2 \quad (29)$$

Po zamianie w równaniu (3)  $Mg_{AB}$  i  $Mg_{BC}$  na dopuszczalny moment zginający dodatni  $Mg_{\max I}$  oraz przekształcając równania, otrzymuje się maksymalne rozstawy stropnic ze względu na momenty przęsłowe. W celu uproszczenia obliczeń oraz uniknięcia obliczania wartości nieistniejącego momentu przęsłowego (maksimum momentu zginającego poza przęsłem), rozstaw wyznacza się tylko dla przęsła dłuższego:

- jeżeli  $a \geq b$ , to  $d_{MAB} = \frac{128Mg_{\max I}}{q_0} \left( \frac{a}{3a^2 + ab - b^2} \right)^2 \quad (30)$



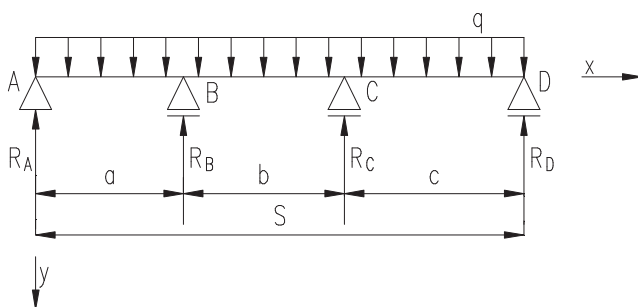
- jeżeli  $b > a$ , to 
$$d_{MBC} = \frac{128Mg_{\max I}}{q_0} \left( \frac{b}{3b^2 + ab - a^2} \right)^2 \quad (31)$$

W celu określenia maksymalnego rozstawu stropnic, należy go wyznaczyć raz ze względu na nośności stojaków lub kotwi i drugi raz ze względu na momenty występujące w stropnicy. Jako maksymalny rozstaw przyjmuje się najmniejszą dodatnią wartość z obliczonych

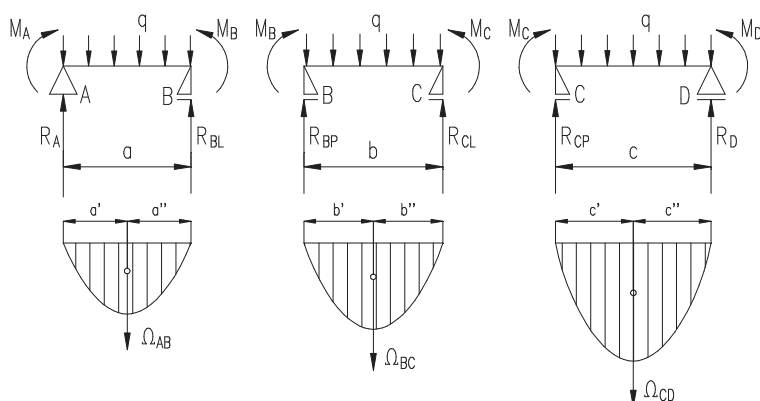
$$d \leq \min(d_A, d_B, d_C, d_{MB}, d_{MAB}, d_{MBC}) \quad (32)$$

### 1.3. Stropnica na czterech podporach

W obliczeniach obudowę czterostojakową traktuje się jako równomiernie obciążoną belkę podpartą na czterech podporach. Jej schemat przedstawiono na rysunku 5.



Rys. 5. Schemat obliczeniowy układu  
Fig. 5. Computational layout of the system



Rys. 6. Idea zamiany belki trójprzęsłowej na trzy belki jedoprzęsłowe  
Fig. 6. Idea of exchange of triple-span beam with three one-span beams

Taka belka stanowi układ dwukrotnie statycznie niewyznaczalny. Do obliczenia reakcji podporowych i momentów zginających w stropnicy wykorzystano metodę

trzech momentów (Jakubowicz, Orłoś 1966; Żuchowski 1966). Układ rozkłada się na belki jednoprzęsłowe, jak na rysunku 6.

Równania trzech momentów mają postać:

$$M_A a + 2M_B(a+b) + M_C b = -6 \left( \Omega_{AB} \frac{a'}{a} + \Omega_{BC} \frac{b''}{b} \right) \quad (33)$$

$$M_B b + 2M_C(b+c) + M_D c = -6 \left( \Omega_{BC} \frac{b'}{b} + \Omega_{CD} \frac{c''}{c} \right) \quad (34)$$

gdzie:

$\Omega$  – pole figury momentów zginających w wyodrębnionym przęśle wywołanych obciążeniem pierwotnym:

$$\Omega_{AB} = \frac{qa^3}{12} \quad \Omega_{BC} = \frac{qb^3}{12} \quad \Omega_{CD} = \frac{qc^3}{12} \quad (35)$$

$a'$ ,  $a''$ ,  $b'$ ,  $b''$ ,  $c'$ ,  $c''$  – parametry określające położenie środków ciężkości figur momentów zginających:

$$a' = a'' = \frac{a}{2} \quad b' = b'' = \frac{b}{2} \quad c' = c'' = \frac{c}{2} \quad (36)$$

Rozwiązując układ równań (33) i (34), otrzymuje się zależność na momenty podporowe:

$$M_B = -\frac{q}{4} K_1 \quad (37)$$

$$K_1 = \frac{b(b^3 + c^3) - 2(a^3 + b^3)(b+c)}{b^2 - 4(a+b)(b+c)} \quad (38)$$

$$M_C = -\frac{q}{4} K_2 \quad (39)$$

$$K_2 = \frac{b(a^3 + b^3) - 2(b^3 + c^3)(a+b)}{b^2 - 4(a+b)(b+c)} \quad (40)$$

W powyższych wzorach wyodrębniono wyrażenia ujmujące rozstawy  $a$ ,  $b$ ,  $c$  stojaków jako współczynniki  $K_1$  (38) i  $K_2$  (39). Po zamianie w równaniu (3)  $M_B$  i  $M_C$  na dopuszczalny moment zginający ujemny  $M_{g_{\max II}}$  oraz przekształcając równania, otrzymuje się maksymalny rozstaw stropnic ze względu na momenty podporowe:

- w miejscu podparcia B

$$d_{MB} = \frac{Mg_{\max II}}{q_0} \cdot \frac{4}{K_1} \quad (41)$$

- w miejscu podparcia C

$$d_{MC} = \frac{Mg_{\max II}}{q_0} \cdot \frac{4}{K_2} \quad (42)$$

Z równania równowagi momentów dla przęsła A-B względem punktu B, otrzymuje się wartość reakcji  $R_A$ :

$$R_A a - \frac{qa^2}{2} - M_B = 0 \quad (43)$$

$$R_A = \frac{q}{4} \cdot \frac{2a^2 - K_1}{a} \quad (44)$$

Z równania równowagi momentów dla przęsła C-D natomiast względem punktu C, otrzymuje się wartość reakcji  $R_D$ :

$$M_C + \frac{qc^2}{2} - R_D c = 0 \quad (45)$$

$$R_D = \frac{q}{4} \cdot \frac{2c^2 - K_2}{c} \quad (46)$$

Stosując zasadę superpozycji dla dwóch sąsiednich przęseł A-B i B-C można wyznaczyć reakcję  $R_B$

$$R_B = R_{BL} + R_{BP} \quad (47)$$

gdzie:

$R_{BL}$  – część reakcji  $R_B$  wywołana obciążeniem lewego przęsła

$$R_{BL} = \frac{qa}{2} - \frac{M_B}{a} + \frac{M_A}{a} \quad (48)$$

$R_{BP}$  – część reakcji  $R_B$  wywołana obciążeniem prawego przęsła

$$R_{BP} = \frac{qb}{2} - \frac{M_B}{b} + \frac{M_C}{b} \quad (49)$$

Ujmując zależności geometryczne układu dwiema zmiennymi  $K_3$  i  $K_4$ , uzyskuje się

$$R_B = \frac{q}{4} K_3 K_4 \quad (50)$$

gdzie:

$$K_3 = \frac{a + b + c}{b(3b^2 + 4ab + 4ac + 4bc)} \quad (51)$$

$$K_4 = \frac{(3a^2b + 2a^2c + 4ab^2 + 3abc - 2ac^2 + b^2c + b^3 - bc^2)(a + b)}{a} \quad (52)$$

W analogiczny sposób wyznacza się reakcję  $R_C$

$$R_C = R_{CL} + R_{CP} \quad (53)$$

gdzie:

$R_{CL}$  – część reakcji  $R_C$  wywołana obciążeniem lewego przęsła

$$R_{CL} = \frac{qb}{2} - \frac{M_C}{b} + \frac{M_B}{b} \quad (54)$$

$R_{CP}$  – część reakcji  $R_C$  wywołana obciążeniem prawego przęsła

$$R_{CP} = \frac{qc}{2} - \frac{M_C}{c} + \frac{M_D}{c} \quad (55)$$

Ujmując zależności geometryczne układu dwiema zmiennymi  $K_3$  i  $K_5$ , uzyskuje się

$$R_C = \frac{q}{4} K_3 K_5 \quad (56)$$

gdzie

$$K_5 = \frac{(3bc^2 + 2ac^2 + 3abc + 4b^2c - 2a^2c + ab^2 + b^3 - a^2b)(b + c)}{c} \quad (57)$$

Po zamianie w równaniu (3)  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  i  $R_D$  na nośność odpowiednich stojaków lub kotwi oraz przekształcając równania, otrzymuje się maksymalne rozstawy stropnic ze względu na nośność podpór.

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie A

$$d_A = \frac{P_{\max A}}{q_0} \cdot \frac{4a}{2a^2 - K_1} \quad (58)$$

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie B

$$d_B = \frac{P_{\max B}}{q_0} \cdot \frac{4}{K_3 K_4} \quad (59)$$

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie C

$$d_C = \frac{P_{\max C}}{q_0} \cdot \frac{4}{K_3 K_5} \quad (60)$$

Rozstaw stropnic ze względu na nośność stojaka lub kotwi w punkcie D

$$d_D = \frac{P_{\max D}}{q_0} \cdot \frac{4c}{2c^2 - K_2} \quad (61)$$

Znając reakcje podporowe można przystąpić do wyznaczenia momentów przęsłowych. Równania momentów zginających w przęsłach A-B i B-C mają postać:

- $0 \leq x \leq a$  
$$Mg = R_A x - \frac{qx^2}{2} \quad (62)$$

- $a \leq x \leq a + b$  
$$Mg = R_A x - \frac{qx^2}{2} + R_B(x - a) \quad (63)$$

Miejsca występowania momentów przęsłowych, określono przez przyrównanie do zera pochodnych równań momentów zginających w odpowiednich przedziałach. Otrzymano:

- dla przęsła A-B 
$$x = \frac{2a^2 - K_1}{4a} \quad (64)$$

- dla przęsła B-C 
$$x = \frac{R_A + R_B}{q} \quad (65)$$

Podstawiając za  $x$  we wzorze (62) wyrażenie (64), otrzymuje się wartość momentu przęsłowego w przęśle A-B

$$Mg_{AB} = \frac{q}{32} \left( \frac{2a^2 - K_1}{a} \right)^2 \quad (66)$$

Ekstremum momentu zginającego  $Mg_{AB}$  występuje w przęśle A-B tylko wtedy, gdy  $x$  obliczone według wzoru (64) spełnia zależność  $0 < x < a$ , co sprowadza się do następującego warunku

$$|K_1| < 2a^2 \quad (67)$$

Gdy warunek ten nie zostanie spełniony, nie należy wyznaczać wartości  $Mg_{AB}$  ani  $d_{MAB}$ .

Podstawiając za  $x$  we wzorze (63) wyrażenie (65), otrzymuje się wartość momentu przęsłowego w przęśle B-C

$$Mg_{BC} = \frac{q}{32} \left[ \left( 2a - \frac{K_1}{a} + K_3 K_4 \right)^2 - 8K_3 K_4 a \right] \quad (68)$$

W celu obliczenia momentu przęsłowego dla przęsła C-D, dla uproszczenia, zmieniono początek układu współrzędnych z punktu A na punkt D oraz zwrot osi  $x$  na przeciwny (w stosunku do przedstawionego na rys. 4). Wtedy równanie momentów zginających ma postać

$$0 \leq x \leq c \quad Mg = R_D x - \frac{qx^2}{2} \quad (69)$$

Miejsce występowania momentu przęsłowego określono jak poprzednio. I tak otrzymano w nowym układzie współrzędnych

$$\text{dla przęsła C-D} \quad x = \frac{2c^2 - K_2}{4c} \quad (70)$$

Podstawiając za  $x$  we wzorze (69) wyrażenie (70), otrzymuje się wartość momentu przęsłowego w przęśle C-D

$$Mg_{CD} = \frac{q}{32} \left( \frac{2c^2 - K_2}{c} \right)^2 \quad (71)$$

Ekstremum momentu zginającego  $Mg_{CD}$  występuje w przęśle C-D tylko wtedy, gdy  $x$  obliczone według wzoru (70) spełnia zależność  $0 < x < c$ , co sprowadza się do następującego warunku

$$|K_2| < 2c^2 \quad (72)$$

Gdy warunek ten nie zostanie spełniony, nie należy wyznaczać wartości  $Mg_{CD}$  ani  $d_{MCD}$ .

Po wstawieniu (3), zamieniając  $Mg_{AB}$ ,  $Mg_{BC}$  i  $Mg_{CD}$  na dopuszczalny moment zginający dodatni  $Mg_{\max I}$  oraz przekształcając równania, otrzymuje się maksymalne rozstawy stropnic ze względu na momenty zginające przęsłowe.

Rozstaw stropnic ze względu na moment przęsłowy między stojakami lub kolumnami A i B

$$d_{MAB} = \frac{Mg_{\max I}}{q_0} \cdot \frac{32a^2}{(K_1 - 2a^2)^2} \quad (73)$$

Rozstaw stropnic ze względu na moment przęsłowy między stojakami lub kolumnami B i C

$$d_{MBC} = \frac{Mg_{\max I}}{q_0} \cdot \frac{32}{\left( K_3 K_4 + 2a - \frac{K_1}{a} \right)^2 - 8K_3 K_4 a} \quad (74)$$

Rozstaw stropnic ze względu na moment przęsłowy między stojakami lub kolumnami C i D

$$d_{MCD} = \frac{Mg_{\max I}}{q_0} \cdot \frac{32c^2}{(K_2 - 2c^2)^2} \quad (75)$$

W celu określenia maksymalnego rozstawu stropnic należy go wyznaczyć raz ze względu na nośność stojaków lub kotwi i drugi raz ze względu na momenty występujące w stropnicy. Jako maksymalny rozstaw przyjmuje się najmniejszą wartość z obliczonych

$$d \leq \min(d_A, d_B, d_C, d_D, d_{MB}, d_{MC}, d_{MAB}, d_{MBC}, d_{MCD}) \quad (76)$$

Zakres stosowania powyższych wzorów zawężono do rozstawów podpór spełniających poniższe warunki:

$$1,0 \leq a \leq 3,2 \text{ m}$$

$$1,0 \leq b \leq 3,5 \text{ m}$$

$$1,0 \leq c \leq 3,2 \text{ m} \quad (77)$$

$$\frac{a+c}{b} \leq 2,3$$

Spełnienie wszystkich zależności (77) pozwala na zachowanie poprawności toku obliczeń. Uzyskuje się momenty podporowe o wartościach ujemnych, a momenty przęsłowe o wartościach dodatnich. W przypadku niespełnienia ostatniego z warunków (77) jest możliwe kontynuowanie obliczeń, lecz należy pamiętać, że ewentualny ujemny rozstaw ze względu na momenty w stropnicy wymusza przyjęcie wartości bezwzględnej oraz zamianę  $Mg_{\max I}$  na  $Mg_{\max II}$  lub odwrotnie i powtórzenie obliczeń. Jednocześnie warunki te w połączeniu z warunkami (67) i (72) wyeliminują możliwość obliczania wartości nieistniejących momentów przęsłowych.

## PODSUMOWANIE

W artykule przedstawiono metody obliczeń podziałki obudowy prostokątnej wraz ze wskazówkami i komentarzami dotyczącymi ich stosowania. W bardzo skróconej formie ujęto wyprowadzenia wybranych zależności. Przytoczone wzory są efektem wielu przekształceń zmierzających do uproszczenia ich zapisu. W tym też celu wprowadzono współczynniki geometryczne  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $K_4$  i  $K_5$ , opisujące zależności między rozmieszczeniem stojaków i kotwi w stropnicy. Podstawę obliczeń stanowiły klasyczne metody wytrzymałości materiałów – metoda superpozycji i metoda trzech momentów. Stąd też wynikają pewne uproszczenia polegające na przyjęciu wyidealizowanego sposobu obciążenia obudowy oraz pośrednim uwzględnieniu jej odkształceń plastycznych.

**Literatura**

1. Jakubowicz A., Orłoś Z. (1966): Wytrzymałość materiałów. Warszawa, WNT.
2. Niezgodziński M.E., Niezgodziński T. (1996): Wzory wykresy i tablice wytrzymałościowe. Warszawa, WNT.
3. PN-G-15000-9:1998 Obudowa chodników odzwiami podatnymi z kształowników korytkowych. Kształowniki korytkowe proste. Próba statyczna zginania.
4. Pytlik A. (1999): Kryteria oceny parametrów wytrzymałościowych na zginanie i skręcanie kształowników typów V25 i V29. Prace Naukowe Głównego Instytutu Górnictwa nr 836.
5. Rułka K. i inni (2000): Uproszczone zasady doboru obudowy korytarzowych wyrobisk przygotowawczych. Katowice, Główny Instytut Górnictwa.
6. Żuchowski R. (1996): Wytrzymałość materiałów. Wrocław, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.

**Recenzent:** prof. dr hab. inż. Kazimierz Stoiński